秘密★启用前

2021年山西省高考考前适应性测试
理科数学参考答案

评分说明:

1. 考生如按其他方法或步骤解答,正确的,同样给分;有错的,根据错误的性质,参照评分说明中相应的规定评分.

2. 计算题只有最后答案而无演算过程的,不给分;只写出一般公式但未能与试题所给的具体条件联系的,不给分.

A卷选择题答案

一、选择题

1. C　2. A　3. D　4. C　5. B　6. D　7. A　8. C　9. A　10. D　11. B　12. D

B卷选择题答案

1. C　2. A　3. C　4. B　5. B　6. D　7. D　8. C　9. D　10. C　11. B　12. A

A、B卷非选择题答案

二、填空题

13. 8

14. $\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$

15. ②④

16. 6

三、解答题

17. 选用条件①的解析.

(1)因为 $a\cos B+b\cos A=\dfrac{\sqrt{7}}{14}ac$,由正弦定理得 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=\dfrac{\sqrt{7}}{14}a\sin C$,　…………………… 2分

即 $\sin C=\dfrac{\sqrt{7}}{14}a\sin C$,又 $\sin C\neq 0$,得 $a=2\sqrt{7}$. …………………………………………………… 4分

$\because \cos C=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$,由余弦定理得 $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$,　…………………………………………… 6分

将 $b-c=2$ 代入解得 $b=6$,$c=4$. …………………………………………………………………… 8分

(2)由余弦定理得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}$,又 $0<A<\pi$, 所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$. ………………………………… 10分

$\triangle ABC$ 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times 6\times 4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$. ……………………………………………… 12分

选用条件②的解析.

(1)因为 $2b\cos C=2a-\dfrac{\sqrt{7}}{7}c$,由正弦定理得

$2\sin B\cos C=2\sin A-\dfrac{\sqrt{7}}{7}\sin C$

$= 2\sin(B + C) - \dfrac{\sqrt{7}}{7}\sin C$ ………………………………………………………… 2分

$= 2(\sin B\cos C + \cos B\sin C) - \dfrac{\sqrt{7}}{7}\sin C$

$\therefore\ 2\cos B\sin C - \dfrac{\sqrt{7}}{7}\sin C = 0$, 又 $\because\ \sin C \neq 0$, $\therefore\ \cos B = \dfrac{\sqrt{7}}{14}$,

$\therefore\ \sin B = \dfrac{3\sqrt{21}}{14}$, ………………………………………………………… 4分

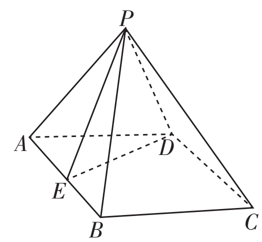
又 $\because\ \cos C = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}$, $\therefore\ \sin C = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$. ………………………………………………… 6分

由正弦定理 $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$, 得 $\dfrac{b}{c} = \dfrac{\sin B}{\sin C} = \dfrac{3}{2}$, 又 $\because\ b - c = 2$, $\therefore\ b = 6, c = 4$. …………………… 8分

(2) $\cos A = -\cos(B + C) = -(\cos B\cos C - \sin B\sin C) = \dfrac{1}{2}$, 又 $0 < A < \pi$, 所以 $A = \dfrac{\pi}{3}$. ……………… 10分

$\triangle ABC$ 的面积为 $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$. ……………………………………… 12分

18. **解:** (1) 设 AB 的中点为 E, 连接 PE 与 DE,



(第18题答图1)

因为 $\triangle PAB$ 是等腰三角形, $PA = PB$, 所以 $PE \perp AB$, 又因为 $AB \perp PD$, $PD \cap PE = P$,

所以 $AB \perp$ 平面 PED, ……………………………………………………… 2分

所以 $AB \perp DE$,

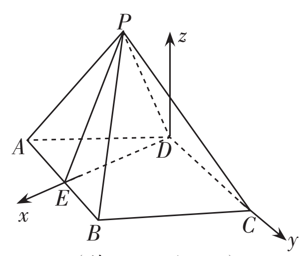
$\therefore\ BD = AD = \sqrt{2}$, $\because\ AB = 2$,

所以 $\triangle ABD$ 是等腰直角三角形, 且 $AD \perp BD$. ………………………………… 5分

(2) 由(1)可知 $AB \perp$ 平面 PED, 故 $AB \perp PD$, 平面 $PED \perp$ 平面 ABD,

又因为 $PC = \sqrt{5}$, $CD \parallel AB$, $\therefore\ CD \perp PD$, $\therefore\ PD = \sqrt{PC^2 - CD^2} = 1$, 易知 $PE = DE = 1$,

所以 $\angle PDE = 60°$. …………………………………………………………… 7分



(第18题答图2)

如图, 以 D 为原点, DE, DC 所在直线为 x, y 轴, 以 $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DC}$ 的方向分别为 x 轴, y 轴的正方向, 过 D 在 $\triangle PDE$ 所在平面内作 DE 的垂线为 z 轴建立空间直角坐标系.

则 $D(0,0,0)$, $P(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$, $A(1,-1,0)$, $B(1,1,0)$. ……………………………… 9分

得 $\overrightarrow{DB} = (1,1,0)$, $\overrightarrow{DP} = (\dfrac{1}{2},0,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$, $\overrightarrow{DA} = (1,-1,0)$,

设平面 PAD 的法向量 $\boldsymbol{n} = (x,y,z)$, 则 $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}z = 0, \\ x - y = 0. \end{cases}$ 取 $\boldsymbol{n} = (\sqrt{3},\sqrt{3},-1)$, ………………………… 11分

所以 $\cos < \overrightarrow{DB}, \boldsymbol{n} > = \dfrac{\overrightarrow{DB} \cdot \boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{DB}||\boldsymbol{n}|} = \dfrac{\sqrt{42}}{7}$,

因此直线 BD 与平面 PAD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$. …………………………………………………… 12分

19. **解:** 记 A_i =“第 i 次验血结果呈阳性”, $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$, $\overline{A_i}$ 表示 A_i 的对立事件.

(1) 解法一: 考虑6只小白鼠的排列顺序, 若 A_1 发生, 则需从2只患病小白鼠中选择1只排在第一位, 其他位置可随意排, 故符合条件的排列顺序共有 $C_2^1A_5^5$ 种。 ……………………………………………… 2分

若 A_1 与 $X = 3$ 同时发生, 则2只患病小白鼠一定排在第一、第三两个位置, 其他位置可随意排不患病的小白鼠,

对应的排列顺序共有$A_2^2A_4^4$种。 ………………………………………………………………………… 4分

根据条件概率的定义及古典概型可知，$P(X=3|A_1)=\dfrac{P(A_1A_3)}{P(A_1)}=\dfrac{A_2^2A_4^4}{C_2^1A_5^5}=\dfrac{1}{5}$. ……………………………… 6分

解法二：根据题意可知，在A_1发生的条件下，$X=3$发生的充要条件是：第二次验血的小白鼠不患病，且第三次验血的小白鼠患病，

故$P(X=3|A_1)=P(\overline{A_2}|A_1)P(A_3|A_1\overline{A_2})=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{5}$. ……………………………………………………… 6分

(2)X的可能取值为2,3,4,5. 由题意可知：$P(X=2)=P(A_1A_2)=\dfrac{A_2^2A_4^4}{A_6^6}=\dfrac{1}{15}$, ……………………………… 7分

$P(X=3)=P(\overline{A_1}A_2A_3)+P(A_1\overline{A_2}A_3)=2\times\dfrac{A_2^2A_4^4}{A_6^6}=\dfrac{2}{15}$, ……………………………………………… 8分

$P(X=4)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3A_4)+P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3}A_4)+P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4)+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4})=4\times\dfrac{A_2^2A_4^4}{A_6^6}=\dfrac{4}{15}$, ………… 9分

故$P(X=5)=1-P(X=2)-P(X=3)-P(X=4)=\dfrac{8}{15}$, ……………………………………………… 10分

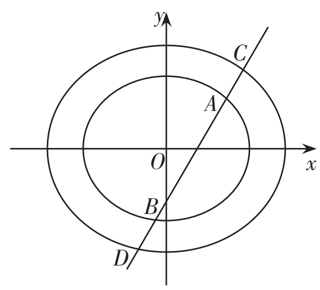
故X的分布列是

X	2	3	4	5
P	$\dfrac{1}{15}$	$\dfrac{2}{15}$	$\dfrac{4}{15}$	$\dfrac{8}{15}$

$E(X)=2\times\dfrac{1}{15}+3\times\dfrac{2}{15}+4\times\dfrac{4}{15}+5\times\dfrac{8}{15}=\dfrac{64}{15}$. ……………………………………………… 12分

20. **解**：(1)设椭圆C_2的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，焦距为$2c$，则由题意得

$$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{2b^2}{a}=3\sqrt{2},\\ c^2=a^2+b^2.\end{cases}$$ ………………………………………………………… 2分



（第20题答图）

解得$a=2\sqrt{2}$，$b=\sqrt{6}$，因此C_2的方程为$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{6}=1$. ……………………………… 5分

(2)设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$C(x_3,y_3)$,$D(x_4,y_4)$,

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=\lambda,\\ y=\sqrt{3}x+m,\end{cases}$ 得$15x^2+8\sqrt{3}mx+4m^2-12\lambda=0(\lambda=1或2)$,

$\because$ l与C_1,C_2相交，只需当$\lambda=1$时$\Delta>0$，$\therefore -\sqrt{15}<m<\sqrt{15}$. ……………………………………… 7分

又$\because$ $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{x_3+x_4}{2}=-\dfrac{4\sqrt{3}m}{15}$，$\therefore$ AB与CD的中点相同，则$|AC|=\dfrac{|CD|-|AB|}{2}$, ……………………… 9分

$\therefore |AC|=\dfrac{1}{2}\times2\times\left(|x_3-x_4|-|x_1-x_2|\right)$

$=\dfrac{\sqrt{4\times8\times6(30-m^2)}}{30}-\dfrac{\sqrt{4\times4\times3(15-m^2)}}{15}$ …………………………………………… 11分

$=\dfrac{4\sqrt{3}\left(\sqrt{30-m^2}-\sqrt{15-m^2}\right)}{15}=\dfrac{4}{5}$

解得$m=\pm\sqrt{3}$，此时$\Delta>0$，故$m=\pm\sqrt{3}$. ……………………………………………………………… 12分

21. **解**:$g(x)$定义域为$(0,+\infty)$,$g'(x)=\dfrac{1}{x}-k=\dfrac{1-kx}{x}$. ………………………… 1分

当$k>0$时,令$g'(x)>0$,得$0<x<\dfrac{1}{k}$,令$g'(x)<0$,得$x>\dfrac{1}{k}$,

故$g(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{k}\right)$上单调递增,在$\left(\dfrac{1}{k},+\infty\right)$上单调递减. ………………………… 2分

(1)当$k=1$时,$g(x)$在$(0,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减,所以$g(x)_{\max}=g(1)=-1$. ………………………… 3分

(2)(i)$\because$ $g(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{k}\right)$上单调递增,在$\left(\dfrac{1}{k},+\infty\right)$上单调递减,$\therefore$ $g(x)$至多有两个零点.

$\because$ $g\left(\dfrac{1}{k}\right)=\ln\dfrac{1}{k}-1>0$,$g(1)=-k<0$,$\therefore$ $g(x)$在$\left(1,\dfrac{1}{k}\right)$上有一个零点.

由(1)可证$\ln x-x\leqslant-1<0$,$\ln x<x$,从而$g\left(\dfrac{4}{k^2}\right)=\ln\dfrac{4}{k^2}-\dfrac{4}{k}=2\ln\dfrac{2}{k}-\dfrac{4}{k}<2\times\dfrac{2}{k}-\dfrac{4}{k}=0$,又$\because$ $g\left(\dfrac{1}{k}\right)>0$,

$\therefore$ $g(x)$在$\left(\dfrac{1}{k},\dfrac{4}{k^2}\right)$上有一个零点.

综上,函数$g(x)$有两个零点. ………………………… 5分

(ii)$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=\ln x+1-kx-1=\ln x-kx=g(x)$.

由(i)知$g(x)$有两个零点,设为x_1,x_2,且$0<x_1<\dfrac{1}{k}<x_2$,且$\ln x_1=kx_1$,$\ln x_2=kx_2$.

又$\because g(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{k}\right)$上单调递增,在$\left(\dfrac{1}{k},+\infty\right)$上单调递减.

$\therefore$ 当$0<x<x_1$,或$x>x_2$时,$g(x)<0$;当$x_1<x<x_2$时,$g(x)>0$.

$\therefore$ $f(x)$在$(0,x_1)$上单调递减,在(x_1,x_2)上单调递增,在$(x_2,+\infty)$上单调递减,

故x_1,x_2为$f(x)$的两个极值点. ………………………… 7分

$\dfrac{f(x_1)}{x_1}=\ln x_1-\dfrac{1}{2}kx_1-1=\ln x_1-\dfrac{1}{2}\ln x_1-1=\dfrac{1}{2}\ln x_1-1$,同理$\dfrac{f(x_2)}{x_2}=\dfrac{1}{2}\ln x_2-1$.

欲证$\dfrac{f(x_1)}{x_1}+\dfrac{f(x_2)}{x_2}=\dfrac{\ln x_1+\ln x_2}{2}-2>-1$,即证$\ln x_1+\ln x_2>2$. ………………………… 8分

$\because\ln x_1=kx_1$,$\ln x_2=kx_2$,$\therefore$ $\begin{cases}\ln x_2+\ln x_1=k(x_2+x_1),\\ \ln x_2-\ln x_1=k(x_2-x_1),\end{cases}$

$\therefore$ $\dfrac{\ln x_2+\ln x_1}{\ln x_2-\ln x_1}=\dfrac{x_2+x_1}{x_2-x_1}$,$\ln x_2+\ln x_1=\dfrac{x_2+x_1}{x_2-x_1}(\ln x_2-\ln x_1)=\dfrac{\dfrac{x_2}{x_1}+1}{\dfrac{x_2}{x_1}-1}\ln\dfrac{x_2}{x_1}$,

令$t=\dfrac{x_2}{x_1}>1$,即证$\dfrac{t+1}{t-1}\ln t>2$,即证$\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}>0$. ………………………… 10分

记$h(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}$,$h'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{(t+1)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$,$\therefore$ $h(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增,故$h(t)>h(1)=0$,

命题得证. ………………………… 12分

选考题

22. **解**:(1)由$\rho^2 = x^2 + y^2$, $\rho\sin\theta = y$,

又$\rho^2 = \dfrac{4}{3-\cos 2\theta} = \dfrac{4}{2+2\sin^2\theta}$,即$2\rho^2 + 2\rho^2\sin^2\theta = 4$,

得$2x^2 + 4y^2 = 4$,即C的直角坐标方程为:$\dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$. ………………………………………… 4分

(2)将$\begin{cases} x = -\dfrac{4}{3} + t\cos\alpha \\ y = -\dfrac{7}{3} + t\sin\alpha \end{cases}$代入$C$:$\dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$有$\left(-\dfrac{4}{3} + t\cos\alpha\right)^2 + 2\left(-\dfrac{7}{3} + t\sin\alpha\right)^2 = 2$,

化简得$\left(3\cos^2\alpha + 6\sin^2\alpha\right)t^2 - 4\left(2\cos\alpha + 7\sin\alpha\right)t + 32 = 0$,

设A,B两点对应的参数分别为t_1,t_2,则

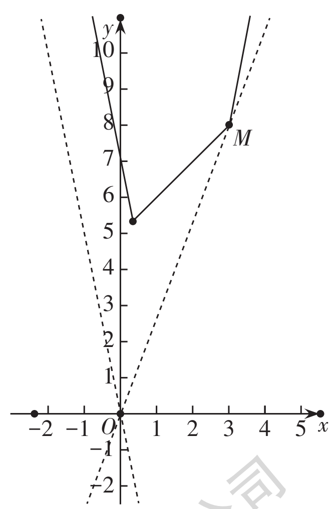
$t_1 + t_2 = \dfrac{4\left(2\cos\alpha + 7\sin\alpha\right)}{3\cos^2\alpha + 6\sin^2\alpha}$, $t_1t_2 = \dfrac{32}{3\cos^2\alpha + 6\sin^2\alpha}$. ………………………………………… 6分

由$\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PB}$,得$t_1 = 2t_2$,$\dfrac{(t_1+t_2)^2}{t_1t_2} = \dfrac{t_1}{t_2} + \dfrac{t_2}{t_1} + 2$, ………………………………………… 8分

因此$\dfrac{\left(2\cos\alpha + 7\sin\alpha\right)^2}{6\cos^2\alpha + 12\sin^2\alpha} = \dfrac{9}{2}$即$5\tan^2\alpha - 28\tan\alpha + 23 = 0$,

解得$\tan\alpha = \dfrac{23}{5}$或1,经检验此时$\Delta > 0$,故直线$l$的方程为$x - y - 1 = 0$或$69x - 15y + 57 = 0$. ………… 10分

23. **解**:(1)$f(x) = |3x-1| + 2|x-3| = \begin{cases} 5x - 7, x \geqslant 3, \\ x + 5, \dfrac{1}{3} \leqslant x < 3, \\ -5x + 7, x < \dfrac{1}{3}. \end{cases}$ ………………………… 2分



(第23题答图)

当$x \geqslant 3$时,函数$f(x)$单调递增,并且$f(x) \geqslant 8$;

当$\dfrac{1}{3} \leqslant x < 3$时,函数$f(x)$单调递增,并且$f(x) \geqslant \dfrac{16}{3}$;

当$x < \dfrac{1}{3}$时,函数$f(x)$单调递减,并且$f(x) > \dfrac{16}{3}$.

综上当$x > \dfrac{1}{3}$时,函数$f(x)$单调递增,

当$x < \dfrac{1}{3}$时,函数$f(x)$单调递减.且$f(x) \geqslant \dfrac{16}{3}$. ………………………… 4分

要使关于x的方程$|3x-1| + 2|x-3| = a$有两个不同的根,则a的取值范围$\{a|a > \dfrac{16}{3}\}$. ………………………………………… 5分

(2)因为$f(3) = 8$,记点$M(3,8)$,坐标原点为$O(0,0)$,

则直线OM的斜率为$k = \dfrac{8}{3}$. ………………………………………… 7分

当直线$y = bx$的斜率$b < -5$,或$b \geqslant \dfrac{8}{3}$时,该直线与函数$f(x) = |3x-1| + 2|x-3|$的图象相交. ………… 9分

因为不等式$f(x) \leqslant bx$的解集非空,所以b的取值范围是$\{b|b < -5$,或$b \geqslant \dfrac{8}{3}\}$. ………… 10分